Vecteurs

Les cours et réponses aux exercices sont téléchargeables sur le site ***MathEnSeconde.fr***

Mesure algébrique

1

Donner l'ensemble des solutions.

a) $|x| = 3$

b) $|x| = -3$

c) $|x| = x$

d) $|x| = -x$

e) $|x+1| = 3$

2

Écrire plus simplement.

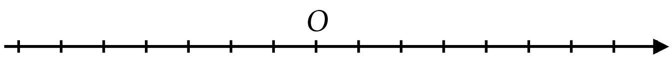
a) $\sqrt{x^2}$

b) $|x|^2$

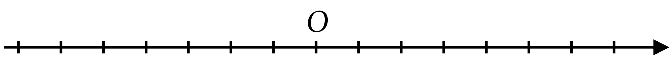
3

Sur un axe d'origine O, placer le point M tel que l'égalité soit vérifiée. *Les graduations, sur les figures suivantes, sont espacées d'une unité de longueur. Appelons cela des graduations « unitaires ».*

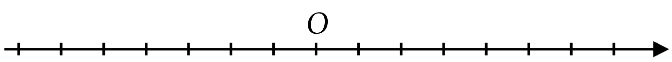
a) $\overline{OM} = +3$



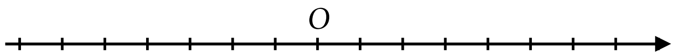
b) $\overline{OM} = -2$



c) $\overline{MO} = +4$



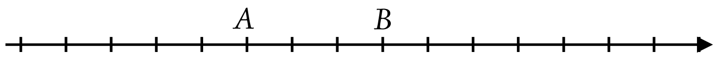
d) $3\overline{OM} + \overline{MO} = -6$



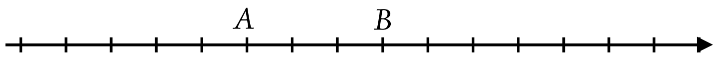
4

A et B étant deux points (distincts), sur un axe, tels que $\overline{AB} = +3$; placer le point M vérifiant l'égalité. *Les graduations, sur les figures suivantes, sont espacées d'une unité de longueur. Appelons cela des graduations « unitaires ».*

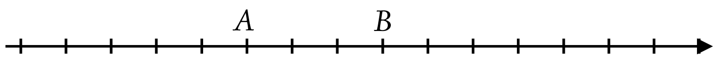
a) $\overline{AM} = +5$



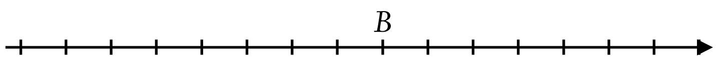
b) $\overline{BM} = -5$



c) $\overline{AM} + \overline{BM} = +1$



d) $\overline{AM} + 2\overline{BM} = -3$



5

A et B étant deux points (distincts), donnés, sur un axe, placer le point M vérifiant l'égalité, sur une figure à main levée. Transformer d'abord l'égalité si nécessaire.

Exemple : $\overline{AM} = 3\overline{AB}$

Sur la figure à main levée, les graduations ne sont pas forcément « unitaires ». Elles seront simplement considérées comme régulièrement espacées.

a) $\overline{AM} = \dfrac{3}{2}\overline{AB}$

b) $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$

c) $2\overline{MA} + 3\overline{MB} = 0$

6

A et B étant deux points (distincts), donnés, sur un axe, placer le point M vérifiant l'égalité, sur une figure à main levée. Transformer d'abord l'égalité si nécessaire.

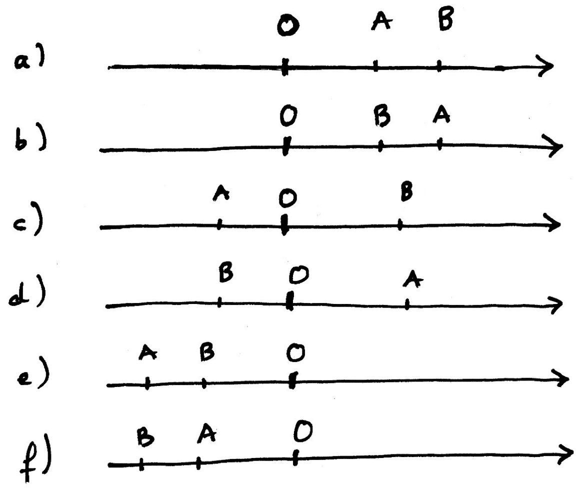
a) $\overline{AM} = -\frac{2}{3}\overline{AB}$

b) $2\overline{MA} - 3\overline{MB} = 0$

7

Sur un axe d'origine O, on considère deux points A et B d'*abscisses* respectives a et b. On demande d'exprimer, dans chaque cas de figure, la distance AB en fonction de a et b.

Sur les figures suivantes, les graduations ne sont pas visibles.



Donner pour finir une formule valable dans tous les cas et donner de cette formule une démonstration ne nécessitant pas de distinguer les cas. Pour cela, passer par la notion de mesure algébrique.

8

Sur un axe donné, on repère les points A et B par les abscisse respectives a et b. Soit M le milieu de $[AB]$, notons m son abscisse.

Exprimer m en fonction de a et de b

La notion de vecteur

9

Sur feuille blanche, à coller.

Soit ABC un triangle donné. Placer si possible les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 et M_6 vérifiant les relations suivantes. On placera les points sur la même <u>figure à main levée</u>.

$\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AM_3} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BM_4} = \overrightarrow{M_4C}$

$\overrightarrow{M_5B} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BM_6} = \overrightarrow{AM_6}$

10

Soient A et B deux points (distincts) donnés du plan. Dire (sans justifier), en des termes de géométrie classique, quel est l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité :

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

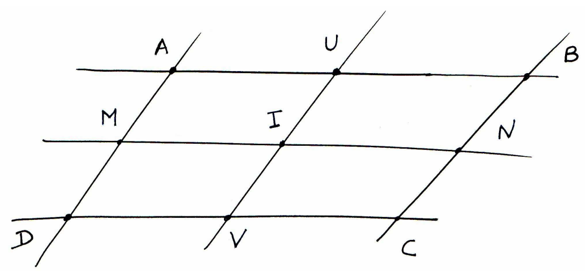
b) $AM = MC$

c) $(AM) = (MB)$

Addition vectorielle

11

Considérons le réseau de parallélogrammes isométriques suivant :



Réduire chaque somme vectorielle (sans introduire de nouveau point) :

a) $\overrightarrow{UB}+\overrightarrow{DM}$

b) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{VC}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{UA}+\overrightarrow{UB}$

e) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$

f) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

g) $\overrightarrow{AU}+\overrightarrow{DV}$

h) $\overrightarrow{AV}+\overrightarrow{VN}$

i) $\overrightarrow{AU}+\overrightarrow{ID}$

j) $\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IU}$

12

Soient A et B deux points (distincts) donnés du plan. Dire (sans justifier), en des termes de géométrie classique, quel est l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité :

a) $AM+MB=AB$

b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Multiplication externe

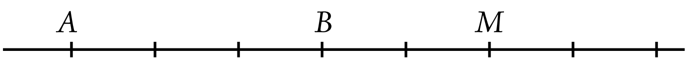
13

Les points A et B sont donnés. Les graduations sont régulièrement espacées. Décrire la position de M par une égalité vectorielle du genre :

$$\overrightarrow{\langle\text{point donné}\rangle\ \langle\text{point inconnu}\rangle} = \langle\text{vecteur connu}\rangle$$

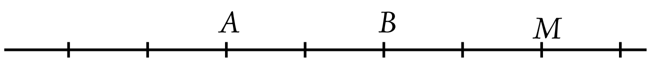
(Un vecteur « connu » étant un vecteur exprimé uniquement à partir des points donnés.)

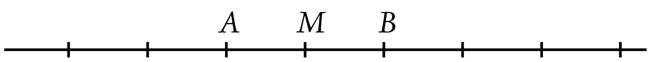
Exemple :

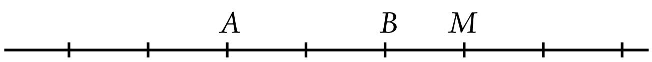


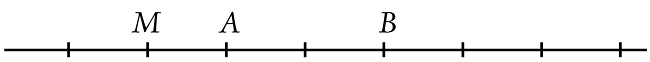
$$\text{« } \overrightarrow{AM}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \text{ »}$$

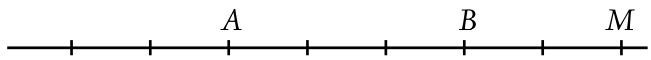
Les graduations ne sont pas forcément « unitaires ». Elles sont juste régulièrement espacées.

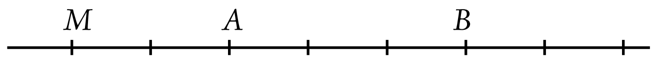
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

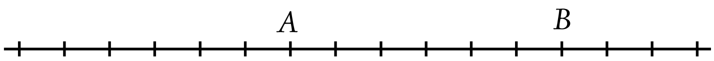
f) 

14

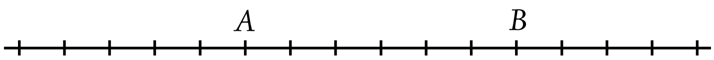
Les points A et B sont donnés. Les graduations sont régulièrement espacées. Placer le point M vérifiant l'égalité. On transformera d'abord l'égalité pour la mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\langle\text{point donné}\rangle\ \langle\text{point inconnu}\rangle} = \langle\text{vecteur connu}\rangle$$

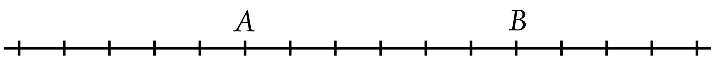
a) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$



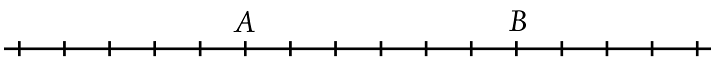
b) $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$



c) $\overrightarrow{BM}=\vec{0}$



d) $3\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}$



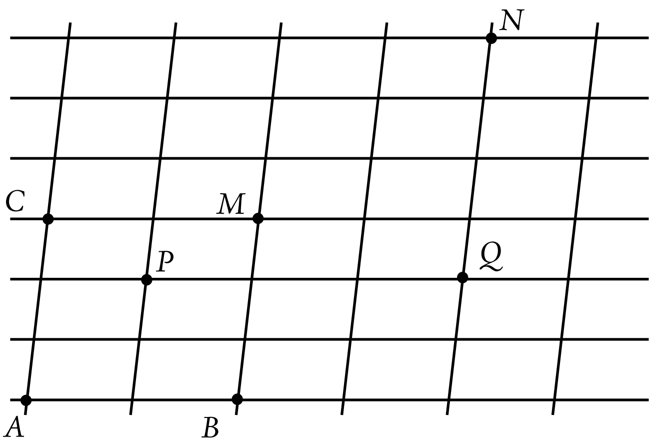
Calcul vectoriel

15

Les points A, B et C sont donnés. Le réseau est formé de parallélogrammes isométriques. Décrire la position des points M, N, P par une égalité vectorielle du genre :

$$\overrightarrow{\langle\text{point donné}\rangle\ \langle\text{point inconnu}\rangle} = \langle\text{vecteur connu}\rangle$$

Par exemple, pour le point Q : « $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ».



16

Réduire lorsque c'est possible (écrire les étapes intermédiaires éventuelles).

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{VA}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$

e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

f) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

g) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

h) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

j) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$

k) $3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BA}$

l) $3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BA}$

m) $3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

n) $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

17

Soient A et B deux points distincts donnés. On demande de transformer les relations vectorielles, de façon à déterminer la position du point M, puis d'indiquer cette position sur des figures à main levée.

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

18

Soit ABC un triangle donné. Déterminer les positions des points M_1 , M_2 , M_3 vérifiant les relations suivantes. On placera ensuite les points sur une même figure à main levée.

$\overrightarrow{M_1A} - \overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{M_1C}$

$\overrightarrow{M_2A} + \overrightarrow{M_2B} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{M_3A} + \overrightarrow{M_3B} = \overrightarrow{M_3C}$

19

Soient A et B deux points donnés. Déterminer la position du point M, puis indiquer cette position sur une figure à main levée :

a) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

b) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

c) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

20

Soient A et B deux points donnés. Déterminer la position du point M, puis indiquer cette position sur une figure à main levée :

a) $-2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

21

Soient A et B deux points donnés. Déterminer la position du point M, puis indiquer cette position sur une figure à main levée :

a) $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

22

Soient A et B deux points donnés. Déterminer la position du point M, puis indiquer cette position sur une figure à main levée :

a) $5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$

b) $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}$

c) $5\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}$

23

Soient A et B deux points donnés. Déterminer la position du point M, puis indiquer cette position sur une figure à main levée :

a) $-2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

c) $4\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}$

e) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}$

24

Soit I le milieu de $[AB]$. Soit M un point quelconque du plan. Démontrer que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

25

Soit ABC un triangle. Soit M un point vérifiant l'égalité :

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$. Démontrer que M est le milieu de $[AI]$, où I est le milieu de $[BC]$.

26

Traduire par une égalité vectorielle :

a) K est le milieu de $[AB]$

b) M' est l'image de M par la symétrie de centre I.

c) $ABCD$ est un trapèze non croisé de base $[DC]$ et $[AB]$ a pour longueur la moitié de DC

d) M appartient au segment $[AB]$ et AM est le tiers de AB.

27

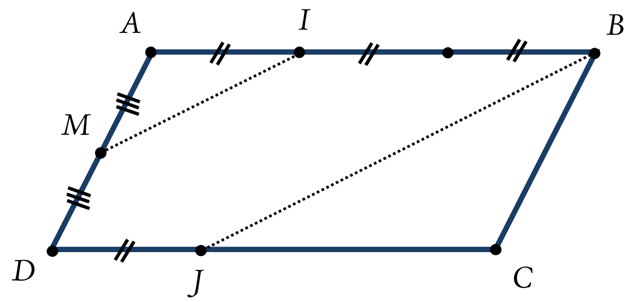
Traduire par une affirmation ne contenant aucun vecteur :

a) $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$

b) Il existe un réel k positif tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

c) Il existe un réel k compris entre 0 et 1 tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

28



$ABCD$ est un parallélogramme.

On veut prouver que $(MI)/\!/(JB)$.

a) Sans justification :
Exprimer $\overrightarrow{MA}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$.
Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JC}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{MI}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$.

c) Exprimer $\overrightarrow{JB}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$.

d) Conclure.

29

Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$.

Soit M un point vérifiant l'égalité : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MJ}=\vec{0}$

b) Transformer l'égalité précédente de façon qu'elle indique la position de M, puis placer M sur une figure à main levée.

30

Soit ABC un triangle. Soit G un point vérifiant l'égalité : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (1). Soit K un point vérifiant l'égalité : $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ (2).

a) Transformer l'égalité (2) de façon à déterminer la position de K. Placer K sur une figure à main levée.

b) Démontrer que G est le milieu de $[KC]$. Placer G sur la même figure à main levée.

31

Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soient I, I', J et J' les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[AD]$ et $[DC]$.

a) Faire une figure à main levée.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{BI'}$ puis exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{II'}$. Démontrer que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{JD}+2\overrightarrow{DJ'}$ puis exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{JJ'}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère $II'J'J$.

32

Droite d'Euler.

Soit ABC un triangle.

a) Démontrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Soit donc G l'unique point vérifiant la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Soit I le milieu de $[BC]$.

b) Démontrer qu'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{GI}$. On donnera la valeur de α, qui est constante. (« α » est la lettre grecque *alpha*.)

c) En déduire que G appartient à la médiane issue de A du triangle ABC.

d) Que représente G pour le triangle ABC ? (Justifiez votre réponse de façon concise)

Soit O un point quelconque.

Soit H le point vérifiant la relation vectorielle $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Il n'est pas demandé ici de construire H.

e) Démontrer qu'il existe un réel β tel que $\overrightarrow{AH}=\beta\overrightarrow{OI}$. On donnera la valeur de β, qui est constante. (« β » est la lettre grecque *bêta*.)

Que peut-on en déduire concernant les positions relatives des droites (AH) et (OI) ?

À présent, O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

f) Déduire de la question précédente que H appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC. (Préférer ici la géométrie classique au calcul vectoriel.)

g) En déduire ce que représente H pour le triangle ABC. (Justifiez votre réponse de façon concise.)

h) Démontrer qu'il existe un réel γ tel que $\overrightarrow{OH}=\gamma\overrightarrow{OG}$. On donnera la valeur de γ, qui est constante. (« γ » est la lettre grecque *gamma*.)